

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**BAREM DE CORECTARE**  
**clasa a XI-a**

1) a) Se adună celelalte linii la prima linie și se scoate  $(n-2)$  factor comun

.....

2p

Se scade prima coloană din celelalte și rezultă că determinantul este egal cu  $(n-2) \cdot (-2)^{n-1}$

2p

b) Se adună prima coloană la celelalte coloane. Elementele care se obțin sunt:

$$\left. \begin{array}{l} 1+1=2 \\ 1-1=0 \\ -1+1=0 \\ -1-1=-2 \end{array} \right\} \text{divizibile cu 2}$$

2p

.....

Se scoate 2 factor comun de pe fiecare coloană mai puțin de pe coloana întâi

.....

1p

2)  $A(X+Y) = X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$

Deci  $A = X - Y$

2p

.....

$$X = \frac{1}{2}(I_n + A),$$

$$Y = \frac{1}{2}(I_n - A) \dots\dots\dots$$

2p

$$AX = X^2 \Leftrightarrow (X-Y)X = X^2 \Leftrightarrow YX = 0_n \dots\dots\dots$$

1p

$$YX = 0_n \Rightarrow \frac{1}{4}(I_n - A^2) = 0_n \Rightarrow A^2 = I_n \dots\dots\dots$$

1p

$$A^{2017} = -I_n \Rightarrow A = -I_n$$

.....

1p

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) = \frac{a}{2},$  4p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 + x}{x+1} = \begin{cases} 1, b=0 \\ \pm \infty, b \neq 0 \end{cases}$  .....

Dacă  $a \neq 2$ , limita cerută este e pentru  $b=0$  și  $a=2e$  ..... 1p

Dacă  $a=2$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)^{\frac{bx^2 + x}{x+1}} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 \right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1}} \right]^{\frac{bx^2 + x}{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1)}}$

este e pentru  $b=-2$  ..... 2p

4)  $\frac{1+a_n}{2} \leq \frac{1+a_{n+1}}{2} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ , adică  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este crescător

2p

Deci și  $a_{n+1} \leq a_{2n} \leq \frac{1+a_{n+1}}{2}$ , de unde rezultă  $a_{n+1} \leq 1, n \in \mathbb{N}^*$ , adică  $a_n \leq 1, n \geq 2$ .

Deci șirul  $(a_n)_n$  este mărginit superior

2p

Așadar există  $a \in (a_1, 1]$  pentru care  $\lim_{x \rightarrow \infty}$

$a_n = a$  .....

1p

Trecem la limită în relația din enunț și rezultă că  $\frac{1+a}{2} \leq a \leq \frac{1+a}{2}$ , adică  $a=1$ .....

1p

Exemplu  $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$  .....

1p